



TITLE:

流体でのHawking輻射

AUTHOR(S):

阪上, 雅昭; 大橋, 憲

CITATION:

阪上, 雅昭 ...[et al]. 流体でのHawking輻射. 物性研究 2001, 76(3): 328-373

ISSUE DATE:

2001-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97013>

RIGHT:

流体での Hawking 輻射^{*)}

阪上雅昭* 大橋 憲†

京都大学総合人間学部基礎科学科

(2001 年 2 月 14 日受理)

概要

まず、ブラックホールが引き起こす最も興味ある現象の 1 つである Hawking 輻射について、特に事象の地平線 (horizon) の役割に注目しながら解説します。次に、時空を流体、horizon を流速と音速が等しくなる sonic point に対応させることで、Hawking 輻射と同じ現象が sonic point をもつ流れで起こり得ることを示し、さらに Laval nozzle による具体例を紹介します。最後に、本来、量子論的現象であった Hawking 輻射に対応する古典的現象と観測量について議論します。

目次

1	Introduction	329
2	Schwarzschild 時空での Hawking 輻射	331
2.1	Minkowski 時空での真空	331
2.2	Schwarzschild 時空	333
2.3	Bogolubov 変換と Hawking 輻射	340
3	流体での Black Hole と Hawking 輻射	346
3.1	音波の伝搬と sonic horizon	346
3.2	Laval Nozzle	350
3.3	Hawking 輻射の古典的対応物	352
4	まとめと議論	357

*sakagami@phys.h.kyoto-u.ac.jp

†ohashi@phys.h.kyoto-u.ac.jp

*) 本稿は、編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である。

A Appendix A: 一般相対論の基礎	358
A.1 計量	358
A.2 テンソル	362
A.3 共変微分	363
A.4 ラプラス演算子	364
B Appendix B: 場の量子化	365
B.1 調和振動子と生成・消滅演算子	365
B.2 スカラー場：無限自由度の調和振動子	367
B.3 Normal mode と真空	368
C Appendix C: ペンローズ図	371

1 Introduction

ブラックホールとは、遠方にいる観測者にいかなる信号も送ることができない時空領域です。このような時空は、無限遠方の観測者と因果関係のないブラックホール領域と無限遠方と因果関係のある外部領域に分けられます。この2つの領域の境界は事象の地平線 (horizon) とよばれます。ブラックホールの外部に物体をおいて自由落下させると、その物体はブラックホールに向かって落ちて行き、やがて horizon を通過してブラックホール領域に達します。しかし後で説明するように horizon が null であるため、その内側から光を含めていかなるものも外部領域に出てくることは許されません。

ところが、この“何も放出しない”という古典的なブラックホール描像は量子論を考えることによって大きく変わってしまいます。ブラックホールが形成される前後での真空の変化に起因する粒子生成のため、ブラックホールは Planck 分布に従う輻射を放出し蒸発するという驚くべき結果が Hawking により示されました [1]。この輻射は彼にちなんで Hawking 輻射と呼ばれ、ブラックホールの引き起こす最も興味深い現象の1つと認識されています。Hawking 輻射が存在すること、さらにそれが Planck 分布という熱的な性質をもつことに horizon が本質的に重要な役割を果たします。それは2章で解説するように horizon 近傍での波（光または質量のないスカラー場）の伝搬を調べることで明らかになります。具体的には、horizon の効果は horizon 近傍での引き延ばしということばに集約されます。その結果として平面波に log 的なふるまいが生じ、その解析性から温度が決定されることが示されます。

このような horizon の役割に注目して

$$\begin{array}{ccc} \text{時空} & & \text{流体} \\ \text{光} & \longleftrightarrow & \text{音波} \end{array}$$

という対応を考えてみましょう。観測者がいる上流から下流に向かって流れが加速され、ある場所で流速が音速を超えたとします。この sonic point の下流側で出された音波は流れを遡ることができないので観測者に到達できません。従って流速が音速を超える点は音波に対する (sonic) horizon の役割を果たしていて、ブラックホールでの Hawking 輻射をシミュレートできるを考えられます。本解説では 3 章で Laval Nozzle を用いて sonic horizon のある流れの具体例をつくります。さらに音波、正確には速度ポテンシャルの摂動がブラックホール時空でのスカラー場の方程式と等価な波動方程式をみたし、量子化によって Hawking 輻射に対応する Planck 分布に従う粒子生成を引き起こすことを示します。

しかしながら、この粒子生成は sonic horizon に起因する真空の変化で引き起こされる量子場の理論特有の現象です。そのため、流体全体にわたって量子コヒーレンスが保たれていなければなりません。この点が実際に流体を用いて Hawking 輻射を観測する実験を行うときの大きな障害です。そこで本解説では最後に sonic horizon 近傍から、流れに逆らって伝搬してくる古典的な波を上流で観測した場合、量子論での粒子数の役割を古典的な波の **Power Spectrum** が果たし、それが Planck 分布に従うことを示します。

本解説では、まず第 2 章で、ブラックホール時空での Hawking 輻射について説明します。この現象を理解するためには、曲がった時空を記述するための一般相対論と真空や粒子生成という概念を取り扱うための量子場の理論について理解していることが不可欠です。そこでこれらの理論に馴染みのない読者のために Appendix を用意し、Hawking 輻射を理解するために最低限必要な一般相対論と量子場の理論の内容を解説してあります。随時必要に応じて Appendix を参照しながら解説を致しますが、これらの理論についてご存じでない読者の方は先に Appendix を読まれることを勧めます。

また、第 3 章ではまず光（または質量のないスカラー場）と音波を対応させます。これは光速度 c を音速 c_s に置き換えることに相当します。次に行う Hawking 輻射の古典的対応物の議論は $\hbar \rightarrow 0$ という操作に対応します。そこでこの対応を明確にするため第 2 章および Appendix ではいわゆる自然単位系 ($c = \hbar = 1$) を取らず、これらの定数を陽に残すことにしました。そのため式がやや長くなりますが、ブラックホール時空での Hawking 輻射と流体での対応する現象を関係を理解するときに役立つと考えます。

2 Schwarzschild 時空での Hawking 輻射

2.1 Minkowski 時空での真空

まず Minkowski 時空での量子論から考えていきましょう。この時空の計量は直交座標系 (ct, x, y, z) では

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

で与えられ、極座標系 $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ に座標変換すると

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.2)$$

$$\equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \left(= \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right) \quad (2.3)$$

となります。本解説では一般相対論の慣例に従い、(2.3) 式のように上下に同じ添字が現れたとき和をとることにします。ここで $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ は単位球面の計量(A.10)です。また計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆はそれぞれ

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$$

です。

Appendix A の(A.34) で説明したように一般の時空での質量のないスカラー場 $\Phi(x^\mu)$ の従う方程式は

$$\square \Phi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi \right] = 0 \quad (2.4)$$

で与えられます。光すなわち電磁場をでもこの章で説明する Hawking 輻射について同じような議論が行えます。ただし、より量子化の手続きが簡単なスカラー場で話を進めたいと思います。ここで $g = \det(g_{\mu\nu})$ は計量テンソルの行列式です。これに、上の Minkowski 時空の計量を入れると

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2} \right) \Phi = 0 \quad (2.5)$$

となります。

$$L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

はいわゆる角運動量演算子(A.35)です。ここで簡単のため S 波に限り議論することにし

$$\Phi(x^\mu) = \frac{\phi(t, r)}{r} \quad (2.6)$$

と置くと、波動方程式

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \phi(t, r) = 0 \quad (2.7)$$

が導かれます。

場の量子化に移りましょう。Appendix B で説明したように場の方程式(2.7) の古典解いわゆる normal mode を調べなければなりません。規格化定数を省略すると S 波の normal mode は次のようになります。

	正エネルギー解	負エネルギー解	
out-going	$\phi_\omega^{out} \propto \exp(-i\omega(ct - r))$	$\phi_\omega^{out*} \propto \exp(i\omega(ct - r))$	(2.8)
in-going	$\phi_\omega^{in} \propto \exp(-i\omega(ct + r))$	$\phi_\omega^{in*} \propto \exp(i\omega(ct + r))$	
	$(\omega > 0)$		

正エネルギー解は(B.20) のように時間推進 (時間微分) に対する固有値の符号で

$$\frac{i}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega \phi, \quad \omega > 0 \quad (2.9)$$

で定義されます。

Appendix C で説明したように Minkowski 時空は図 1 のようなペンローズ図で表されます。ただしペンローズ図を画く詳細な手順は、ここではまったく重要ではなく、次のように定義される future (past) null infinity $I^+(I^-)$

past null infinity I^-	future null infinity I^+
$t \rightarrow -\infty \quad u = ct - r \rightarrow -\infty$	$t \rightarrow +\infty \quad u = ct - r = \text{finite}$
$r \rightarrow +\infty \quad v = ct + r = \text{finite}$	$r \rightarrow +\infty \quad v = ct + r = \infty$

にだけ注目してください。normal mode (2.8) は質量のないスカラー場のみならず波動方程式 (2.7) の解で、光と同じく null 方向に進みます。in-going mode は I^- から $r = 0$ へ左 45° 、out-going mode は $r = 0$ から I^+ へ右 45° に伝搬する波です。past null infinity I^- での真空には in-going で正エネルギーの normal mode ϕ_ω^{in} 、future null infinity I^+ での真空には out-going で正エネルギーの normal mode ϕ_ω^{out} が対応します。

I^- から正エネルギー解 ϕ_ω^{in} を入射します。この波は原点 $r = 0$ で跳ね返されて I^+ に達します。原点での境界条件 $\phi = 0$ ($r = 0$) を課して波の伝搬 (散乱) を解

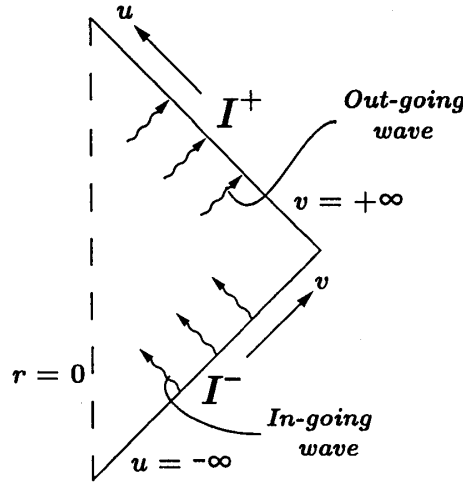


図 1: Minkowski 時空のペンローズ図

いてやると I^+ での波はやはり正エネルギー解 ϕ_{ω}^{out} であることが示せます。 I^- での正エネルギー解が、 I^+ で、正と負のエネルギー解の重ね合わせではなく、正エネルギー解のみになるという事実は I^- と I^+ の真空が同じであることを意味しています。

2.2 Schwarzschild 時空

ブラックホール時空 ここまで考えてきた Minkowski 時空では、図 1 から容易にわかるように、任意の時空点から外向きに出された光は future null infinity I^+ に到達します。これは Minkowski 時空のすべての時空点が I^+ と因果的につながっていることを意味します。これに対して、ある時空に future null infinity I^+ に光すなわち情報を送れないような時空領域が存在する場合、その領域をブラックホール領域といいます。これに対して I^+ と因果的につながっている領域を外部領域といいます。このときブラックホール領域と外部領域の境界は事象の地平線 (horizon) と呼ばれ、本解説でとりあげる Hawking 輻射において非常に重要な役割を果たします。このようなブラックホール領域をもつ時空を代表例が Schwarzschild 時空で、その計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.10)$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.11)$$

で与えられます [2, p.93]。少し歴史的な話をすると、Einstein が一般相対性理論を発表した翌年の 1916 年には、既に Einstein 方程式の球対称真空解として Schwarzschild 時空の計量(2.10)が得られていました。しかし、この時空がブラックホールを表していることが理解されたのは 1958 年のことでした。このあたりに興味のある方は文献 [3] をご覧下さい。これから Schwarzschild 時空がブラックホール領域をもつことを示しますが、その前にこの時空のいくつかの性質について述べておきます。まず、ブラックホールから離れてゆく、つまり $r \rightarrow \infty$ で Minkowski 時空 (2.3) に漸近することがわかります。また (2.11) 式で、重力定数 G 、光速 c 、ブラックホールの質量 M で定義されている r_g は Schwarzschild 半径 とよばれ $r = r_g$ に事象の地平線 (horizon) があり、その内部のブラックホール領域からは光が出てくることができません。これを示すために、まず動径方向 ($d\theta = d\varphi = 0$) の null 測地線

$$\begin{aligned}
 0 = ds^2 &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \\
 &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (c^2 dt^2 - dr^{*2}) = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) d(ct + r^*) d(ct - r^*)
 \end{aligned}$$

を考えましょう。ここで r^* は tortoise 座標とよばれ

$$\begin{aligned}
 dr^* &= \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \\
 \longrightarrow r^* &= r + r_g \ln \left| \frac{r - r_g}{r_g} \right|, \quad (-\infty < r^* < +\infty)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

で定義されます。さらに tortoise 座標を用いると in-going null 測地線すなわち時間とともに無限遠から $r = 0$ へ向かう光の軌跡を

$$v = ct + r^* = \text{const.} \quad (dv = d(ct + r^*) = 0) \tag{2.13}$$

と表すことができます。この null 測地線を座標の 1 つとする Eddington-Finkelstein 座標 (v, r, θ, φ) では、Schwarzschild 計量(2.10)は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{2.14}$$

となります。(2.14) は (2.13) から得られる座標変換 $cdt = dv - \frac{dr}{(1 - r/r_g)}$ を Schwarzschild 計量(2.10)に代入し dt を消去することで得られます。角度座標を

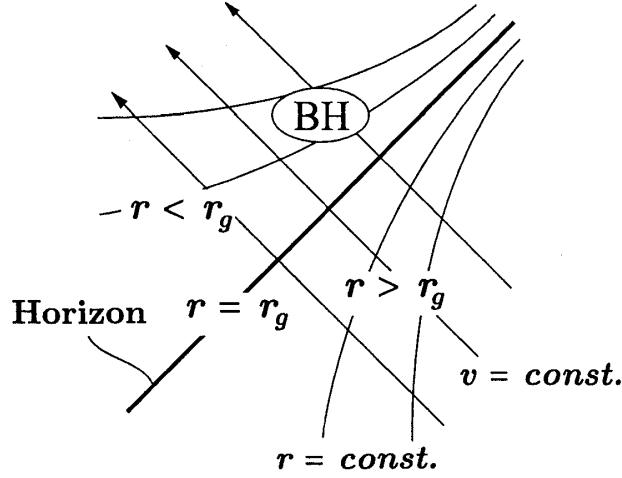


図 2: Eddington-Finkelstein 座標での Schwarzschild ブラックホール時空

無視すると ($d\theta = d\varphi = 0$)、 (v, r) 座標は図 2 のように画かれます。まず半径 $r = r_g$ ($dr = 0$) の表す軌跡を考えましょう。計量(2.14) から、これが null であることがわかり図 2 では $r = r_g$ は右上がり 45° の直線で表されています。光の測地線も左右 45° の直線を描くので、図 2 より $r < r_g$ の領域から外向きに放出された光は $r \geq r_g$ の領域に到達することができないことが示されます。これは $r < r_g$ の領域から future null infinity I^+ ($t \rightarrow +\infty, r \rightarrow +\infty$) に光を送ることができないことを意味します。従って I^+ と因果関係をもつことのできない時空領域である $r < r_g$ がブラックホール領域、その境界 $r = r_g$ が事象の地平線 (horizon) にであることがわかります。また図 2 の左上がり 45° の直線 $v = \text{const.}$ は in-going null 測地線 (2.13) すなわち外部領域から horizon を通過してブラックホール領域に入っていく光を表しています。このように Eddington-Finkelstein 座標を用いると光を吸収するが放出はしないというブラックホールの性質が明らかになります。

Normal mode Schwarzschild 時空での真空の性質を明らかにするため、まず normal mode を調べましょう。Eddington-Finkelstein 座標 $x^\mu = (v, r, \theta, \varphi)$ での計量(2.14)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{r_g}{r}) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (1 - \frac{r_g}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}$$

を質量のないスカラー場の方程式(2.4) に代入し Minkowski 時空と同じように S 波(2.6) に限ってやると波動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\partial}{\partial v} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \right] \phi(v, r) &= 0 \\ \longrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial r^*} \right] \phi(v, r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

が導かれます。この方程式の正エネルギー解は

out-going	$\phi_\omega^{out} = C_\omega \exp(-i\omega u)$	$\omega = \frac{2\pi n}{L} > 0$
in-going	$\phi_\omega^{in} = C_\omega \exp(-i\omega v)$	n は自然数

(2.16)

で与えられます。ここで u は out-going null 座標

$$u = v - 2r^* = ct - r^* \quad (2.17)$$

で $r = 0$ から無限遠に向かう null 測地線の特徴付けています。もちろん負エネルギー解はそれぞれの複素共役で得られます。またブラックホールから十分に遠ざかると計量(2.14) も mode (2.16) も Minkowski 時空のものに近づくことから、この mode の妥当性がわかります。また、(B.18) に対応するノルムは

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &\equiv -i \int_L du \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2^*}{\partial u} - \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \phi_2^* \right) \text{ at } I^+ \\ &\equiv -i \int_L dv \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2^*}{\partial v} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \phi_2^* \right) \text{ at } I^- \end{aligned} \quad (2.18)$$

で与えられ、(B.21) のように

$$\begin{aligned} (\phi_\omega^{out}, \phi_{\omega'}^{out}) &= \delta_{\omega\omega'} & (\phi_\omega^{out}, \phi_{\omega'}^{out*}) &= 0 \\ (\phi_\omega^{out*}, \phi_{\omega'}^{out*}) &= -\delta_{\omega\omega'} & (\phi_\omega^{out*}, \phi_{\omega'}^{out}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

と正規直交化されます¹。 $\{\phi_\omega^{in}, \phi_\omega^{in*}\}$ についても同様です。規格化定数は

$$C_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\omega L}} \quad (2.20)$$

です。ただし今後の議論に C_ω の具体的な形は無関係です。

¹ここでは box normalization を採用します。

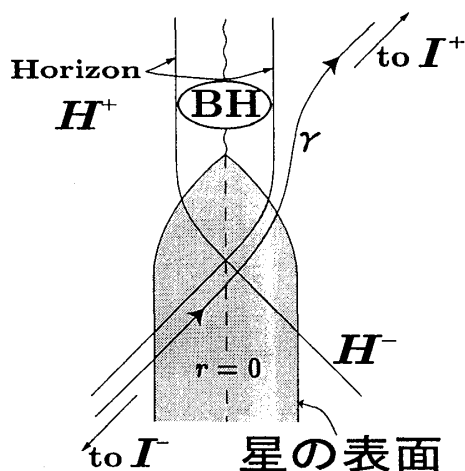


図 3: 星の重力崩壊とブラックホール形成

Minkowski 時空での議論と同様に past null infinity I^- と future null infinity I^+ での normal mode の関係を調べましょう。図 3 のように星が重力崩壊を起こしている状況を考えます。星の表面が収縮し Schwarzschild 半径より小さくなるとブラックホール時空が生成されます。 γ は I^- から出て horizon 近傍を通り I^+ へ向かう null 測地線です。これをペンローズ図にしたのが図 4 です。Eddington-Finkelstein

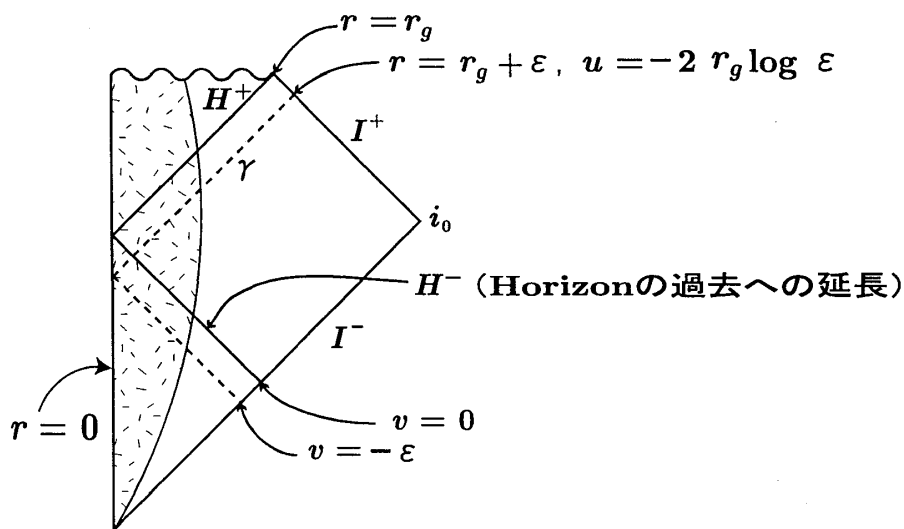


図 4: 星の重力崩壊とブラックホール形成のペンローズ図

座標での計量(2.14) および図 2 で示したように $r = r_g$ は null で右上がり 45° の直線で表されます。光の伝搬すなわち null 測地線も 45° の直線になるので $r < r_g$ から外向きに出された光は $r = r_g$ を越えて無限遠方に達することができません。従って $r < r_g$ がブラックホール領域、その境界である $r = r_g$ が horizon でした。

Appendix Cで説明しているようにペンローズ図は無限遠方を共形変換で有限なところにもってきますが、角度は保存するので、ペンローズ図でも horizon は傾き 45° 右上がりの直線で表されます。図4では horizon を H^+ で示しています。この内側がブラックホール領域です。ブラックホール時空のペンローズ図についてもこれ以上詳細な点は重要ではありません。future null infinity I^+ , past null infinity I^- に加えて horizon H^+ が存在することにだけ注目してください。さらに horizon を $r=0$ で折り返し null 測地線で I^- まで引き戻したものを H^- (horizon の過去への延長) とよぶことにし、 H^- と I^- の交点の座標の値を $v=0$ とします。また星の内部の時空は Schwarzschild 計量(2.10)とは異なります。ただし、ここでの議論には時空の詳細はあまり関係なく、normal mode に対する中心での境界条件が Monkowski 時空と同じであることが重要です。図4に画いているように、null 測地線 γ は I^- から $v = \text{const.}$ で中心 $r=0$ に向かい、そこで反射され、その後は $u = \text{const.}$ で I^+ へ進んでいきます。

次に I^+ での真空を定義する out-going 正エネルギー解

$$\phi_\omega^{\text{out}} = C_\omega \exp(-i\omega u) \quad (2.21)$$

を null 測地線 γ に沿って I^- まで引き戻して見ましょう。図4のように γ は horizon H^+ から微小な距離 ϵ だけ離れているとします。図5(a)に H^+ 近傍の様子を示します。horizon 近傍 $r \sim r_g$ での動形方向 ($d\theta = d\varphi = 0$) への距離は(2.14)より

$$ds^2 = 2dvdr \quad (2.22)$$

で与えられます。 dv は horizon 方向、そして dr が r 方向の微小変位なので、horizon H^+ と γ の距離は $dr = \epsilon$ です。従って γ の r 座標は

$$r = r_g + \epsilon \quad (2.23)$$

となります。対応する tortoise 座標 (2.12) は

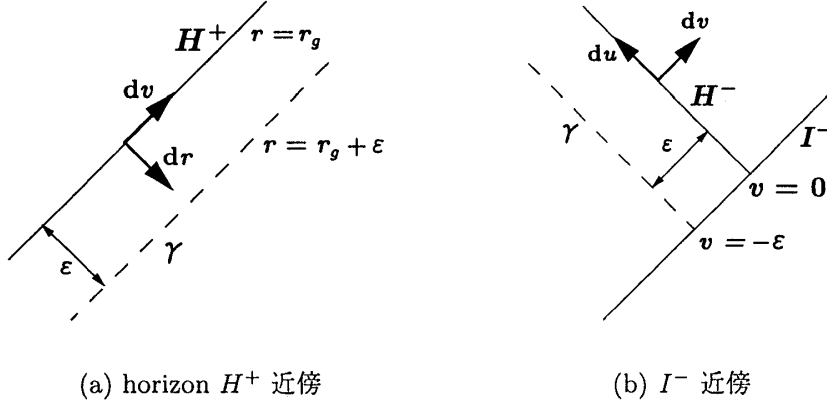
$$r^* \sim r_g + r_g \ln \epsilon$$

なので ϕ_ω^{out} (2.21) の u 座標は

$$\begin{aligned} u &= v - 2r^* \\ &\sim -2r_g \ln \epsilon + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.24)$$

で与えられます。horizon に近づく ($\epsilon \rightarrow 0$) と u 座標は $u \rightarrow \infty$ と発散し、mode (2.21) で見ると γ と horizon の間で無限回振動していることがわかります。この null 測地線 γ を I^- へ引き戻した様子を図5(b)に示します。無限遠方なので Minkowski 時空になっており計量は(C.2)のように

$$ds^2 = -dudv$$


 図 5: horizon H^+ 近傍 と I^- 近傍での null 測地線

です。 H^- と γ の距離は $dv = \epsilon$ ですから I^- 近傍では null 測地線 γ は

$$v = -\epsilon \quad (2.25)$$

で表されます。今までの議論をまとめると

H^+	$u \sim -2 r_g \ln \epsilon$	$\epsilon \sim \exp(-\frac{u}{2r_g})$
I^-	$v = -\epsilon$	$\epsilon = -v$

(2.26)

となります。ここで ϵ は H^+, I^- 近傍での horizon (およびその延長) と null 測地線 γ との proper な距離で、図 4 のように、null 測地線はこの距離を一定に保って伝搬します。また u, v は、それぞれの領域で normal mode を特徴づける null 座標です。この関係を使って I^+ での正エネルギー解(2.21) は

$$\begin{aligned}
 \phi_{\omega}^{out} &\propto \exp(-i\omega u) && \text{at } I^+ \\
 &\longrightarrow \exp(2ir_g\omega \ln \epsilon) \\
 &\longrightarrow \exp(2ir_g\omega \ln(-v)) && \text{at } I^-
 \end{aligned}$$

と I^- での解につながられます。以上の議論から I^+ での正エネルギー解(2.21) を I^- へ引き戻して得られる解を χ_{ω} とすると規格化定数(2.20) も含めて

$$\chi_\omega(v) = \begin{cases} 0 & v > 0 \\ C_\omega \exp\left(i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v)\right) & v < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\kappa = \frac{1}{2r_g} \quad (2.28)$$

で与えられます。 χ_ω が $v > 0$ でゼロになっているのは、この部分の mode はブラックホールに落下してしまい、 I^+ の mode と関係が無いからです [4]。ここで κ は surface gravity とよばれる、horizon を特徴づける幾何学量で Schwarzschild ブラックホールの場合

$$r - r_g \sim 0 \quad \longrightarrow \quad \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sim 2\kappa(r - r_g) \quad (2.29)$$

と horizon での計量の一階微分になり (2.28) で与えられます²。

2.3 Bogolubov 変換と Hawking 輻射

I^+ での正エネルギー解 ϕ_ω^{out} (2.21) を I^- へ引き戻した解 χ_ω (2.27) は I^- での正エネルギー解ではなく $\phi_\omega^{\text{in}}, \phi_\omega^{\text{in}*}$ の重ね合わせになります。従って Minkowski 時空の場合と異なり I^+ と I^- の真空は同じではありません。真空が変化することにより粒子生成が起こることを示して行きます。

Bogolubov 変換 normal mode $\{\phi_\omega^{\text{in}}, \phi_\omega^{\text{in}*}\}$ は完全系 (S 波のみ) を張っているので、スカラー場の演算子は (B.25) のように

$$\Phi(x) = c\hbar^{1/2} \sum_{\omega>0} \left(a_\omega \frac{\phi_\omega^{\text{in}}}{r} + a_\omega^\dagger \frac{\phi_\omega^{\text{in}*}}{r} \right) \quad (2.30)$$

と展開されます。ここで $a_\omega(a_\omega^\dagger)$ は I^- での消滅 (生成) 演算子で (B.30) に対応する交換関係

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta_{\omega\omega'} \quad (2.31)$$

を充たし I^- での真空は (B.33) と同様に

$$a_\omega |0 \text{ in}\rangle = 0, \quad \text{for } \forall \omega \quad (2.32)$$

で定義されます。但し、 $|0 \text{ in}\rangle$ は in-going wave ϕ_ω^{in} に対する真空を表しています。 I^+ についても全く同じで、展開は

$$\Phi(x) = c\hbar^{1/2} \sum_{\omega>0} \left(\bar{a}_\omega \frac{\phi_\omega^{\text{out}}}{r} + \bar{a}_\omega^\dagger \frac{\phi_\omega^{\text{out}*}}{r} \right) \quad (2.33)$$

² κ の幾何学的定義は、例えば [4, subsection 2.3.6] を見てください

交換関係は

$$[\bar{a}_\omega, \bar{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta_{\omega\omega'} \quad (2.34)$$

真空は

$$\bar{a}_\omega |0 \text{ out}\rangle = 0, \quad \text{for } \forall \omega \quad (2.35)$$

で与えられます。但し、 $|0 \text{ out}\rangle$ は out-going wave ϕ_ω^{out} に対する真空を表し、以下に示すように一般に $|0 \text{ in}\rangle$ とは異なります。

次に、この2つの真空の関係を調べましょう。 ϕ_ω^{out} は $\{\phi_\omega^{\text{in}}, \phi_\omega^{\text{in}*}\}$ を用いて

$$\phi_\omega^{\text{out}} = \sum_{\omega' > 0} (A_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^{\text{in}} + B_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^{\text{in}*}) \quad (2.36)$$

と展開することができます。 I^+, I^- の normal mode を関係づける(2.36) を Bogolubov 変換、 $A_{\omega\omega'}, B_{\omega\omega'}$ を Bogolubov 係数といいます。Minkowski 時空のように正エネルギー解が I^+, I^- で不変な場合

$$\begin{aligned} B_{\omega\omega'} = 0 &\iff \{\phi_\omega^{\text{out}} : \omega > 0\} = \{\phi_\omega^{\text{in}} : \omega > 0\} \\ &\iff |0 \text{ in}\rangle = |0 \text{ out}\rangle \end{aligned}$$

と真空は不変になります。norm (2.19) から変換係数は

$$\boxed{AA^\dagger - BB^\dagger = 1, \quad AB^T - BA^T = 0} \quad (2.37)$$

充たすことが示されます。ただし、 A, B は Bogolubov 係数を無限次元の行列として表したものです。また逆変換を

$$\phi_\omega^{\text{in}} = \sum_{\omega' > 0} (\bar{A}_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^{\text{out}} + \bar{B}_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^{\text{out}*}) \quad (2.38)$$

とすると

$$\boxed{\bar{A} = A^\dagger, \quad \bar{B} = -B^T} \quad (2.39)$$

という関係が導かれます。

次に I^+, I^- での生成・消滅演算子の関係を求めましょう。(2.30) に(2.38) を代入し(2.33) と比較、さらに(2.39) を用いると

$$\bar{a}_\omega = \sum_{\omega' > 0} (A_{\omega\omega'}^* a_{\omega'} - B_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^\dagger) \quad (2.40)$$

が得られます。

変換係数の計算 I^+ での正エネルギー解 ϕ_ω^{out} を I^- まで引き戻した χ_ω (2.27) と $\phi_\omega^{in}, \phi_\omega^{in*}$ とのスカラール積より Bogolubov 係数は

$$A_{\omega\omega'} = (\chi_\omega, \phi_{\omega'}^{in}), \quad B_{\omega\omega'} = -(\chi_\omega, \phi_{\omega'}^{in*}), \quad (\omega' > 0)$$

で与えられます。(2.16)(2.18) (2.27) より

$$\begin{aligned} A_{\omega\omega'} &= -i \int dv \left(\chi_\omega \frac{\partial \phi_{\omega'}^{in*}}{\partial v} - \frac{\partial \chi_\omega}{\partial v} \phi_{\omega'}^{in*} \right) \\ &= C_\omega C_{\omega'} \int_{-\infty}^0 dv \left(\omega' + \frac{\omega}{\kappa v} \right) \exp \left\{ i\omega' v + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-v) \right\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

となります。さらに、 $\omega' > 0$ なので図6のように $v = ix$ と上半面の虚軸方向に積分路を回してやると

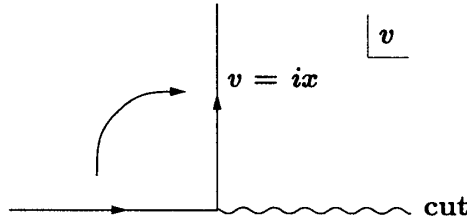


図 6: 積分路

$$\begin{aligned} A_{\omega\omega'} &= -i C_\omega C_{\omega'} \int_0^\infty dx \left(\omega' - \frac{i\omega}{\kappa x} \right) \exp \left\{ -\omega' x + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-ix) \right\} \\ &= -i \exp \left(\frac{\pi\omega}{2\kappa} \right) C_\omega C_{\omega'} \\ &\quad \times \int_0^\infty dx \left(\omega' - \frac{i\omega}{\kappa x} \right) \exp \left\{ -\omega' x + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(x) \right\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

という表式が得られます。ここで $-i = \exp(-i\pi/2)$ を用いました。また $B_{\omega\omega'}$ については逆に $v = -ix$ と下半面に積分路を回すと

$$\begin{aligned} B_{\omega\omega'} &= i \int dv \left(\chi_\omega \frac{\partial \phi_{\omega'}^{in}}{\partial v} - \frac{\partial \chi_\omega}{\partial v} \phi_{\omega'}^{in} \right) \\ &= i \exp \left(-\frac{\pi\omega}{2\kappa} \right) C_\omega C_{\omega'} \\ &\quad \times \int_0^\infty dx \left(\omega' - \frac{i\omega}{\kappa x} \right) \exp \left\{ -\omega' x + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(x) \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

となります。(2.42)(2.43) を比較すると下線部を除いて一致しているので

$$\boxed{A_{\omega\omega'} = -\exp \left(\frac{\pi\omega}{\kappa} \right) B_{\omega\omega'}} \quad (2.44)$$

という関係があることが示せます。

Hawking 輻射 ここまで得られた結果(2.37)(2.44) から、Bogolubov 係数 $B_{\omega\omega'}$ はゼロではありません。従って Schwarzschild 時空では I^+ と I^- の真空が異なることがわかります。そこで I^+ での振動数 ω の mode の粒子数演算子

$$\bar{N}_\omega = \bar{a}_\omega^\dagger \bar{a}_\omega \quad (2.45)$$

を考えましょう。もちろん I^+ での真空 $|0 \text{ out} \rangle$ の期待値は(2.35) より当然

$$\langle 0 \text{ out} | \bar{N}_\omega | 0 \text{ out} \rangle = 0$$

となります。ブラックホール (horizon) が形成される前、 I^- での初期状態が真空 $|0 \text{ in} \rangle$ であったとしましょう。Heisenberg 描像で考えると I^- から I^+ へ時間発展する間に量子状態は $|0 \text{ in} \rangle$ のままですが、粒子数演算子は

$$N_\omega = a_\omega^\dagger a_\omega \longrightarrow \bar{N}_\omega = \bar{a}_\omega^\dagger \bar{a}_\omega$$

と変化します。 I^+ で観測される粒子数は(2.40) より

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}_\omega \rangle_{\text{in}} &\equiv \langle 0 \text{ in} | \bar{N}_\omega | 0 \text{ in} \rangle \\ &= \sum_{\rho, \sigma > 0} \langle 0 \text{ in} | (A_{\omega\rho} a_\rho^\dagger - B_{\omega\rho} a_\rho) (A_{\omega\sigma}^* a_\sigma - B_{\omega\sigma}^* a_\sigma^\dagger) | 0 \text{ in} \rangle \\ &= \sum_{\rho > 0} B_{\omega\rho} B_{\omega\rho}^* = (BB^\dagger)_{\omega\omega} \end{aligned} \quad (2.46)$$

と Bogolubov 係数 $B_{\omega\omega'}$ で与えられます。ここで(2.37)(2.44) より

$$\begin{aligned} \delta_{\omega\omega'} &= (AA^\dagger - BB^\dagger)_{\omega\omega'} \\ &= \left(e^{\pi(\omega+\omega')/\kappa} - 1 \right) (BB^\dagger)_{\omega\omega'} \end{aligned}$$

さらに $\omega = \omega'$ とすると $(BB^\dagger)_{\omega\omega}$ が求められます。従って、 I^+ で観測される粒子数は

$$\langle \bar{N}_\omega \rangle_{\text{in}} = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \quad (2.47)$$

となり、ブラックホールは Planck 分布に従う黒体輻射を放出していることが示されました [1]。また、ここでの計算とは逆に Schrödinger 描像に於て粒子数の定義は I^+, I^- で同じで、状態が $|0 \text{ in} \rangle$ から $|0 \text{ out} \rangle$ に時間発展すると考えても同じ結果が得られます。

ここで行った Hawking 輻射の導出では、horizon 近傍ではあっても、すべての mode は horizon の外部を伝搬しています。従って I^+, I^- の真空が異なり粒子生

成 (2.47) が生じたとしても、それがブラックホールの放出する輻射とみなすことには疑問があると思います。しかしこれは 2 章で I^+ での正エネルギー解を I^- まで引き戻して Bogolubov 係数を計算するという手法を取ったからです。このやり方は計算が簡単なのですが上のような疑問を生じさせる危険性があります。2 章で求めた Bogolubov 係数は、 I^- での正エネルギーと負エネルギー解をうまく重ねることで horizon を通ってブラックホールに落ちていく mode をゼロにする係数を求めたことになっています。これは χ_ω (2.27) が $v > 0$ の場合にゼロになっていることに端的に示されています。従って、 I^- での真空すなわち正エネルギー解 ϕ_ω^{in} の場合、その一部は horizon を通過してブラックホールに落ちてしまいます。この状況でエネルギー運動量テンソルを計算すると、負のエネルギー流束がブラックホールに向かい、正のエネルギー流束が I^+ に向かうことが示されます。これはブラックホールが輻射を放出し、自らのエネルギーを減少させていることを意味します [5] [6, section 8.2]。

Hawking 温度とその起源 分布を特徴づける surface gravity κ は Schwarzschild ブラックホールの場合(2.28)(2.11) より

$$\kappa = \frac{1}{2r_g}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

で与えられます。ここで r_g は質量 M のブラックホールの horizon の半径である Schwarzschild 半径です。従って surface gravity κ は (長さ) $^{-1}$ の次元です。 ω も(2.16) から同じ次元であることがわかります。例えば太陽質量 $M_\odot = 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$ のブラックホールでは $r_g \sim 3 \text{ km}$ で、これが Hawking 輻射の波長を特徴づけます。温度に換算すると

$$k_B T_H = \frac{c\hbar}{2\pi} \kappa = \frac{c^3 \hbar}{8\pi G M} \quad (2.48)$$

となります。ここで k_B は Boltzmann 定数です。具体的に数値を代入すると

$$T \sim 6.2 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \text{ K}$$

と、太陽質量程度のブラックホールの場合非常に低温になります。ブラックホールのエネルギーは質量 M に比例するので、Hawking 温度(2.48) は、エネルギーを失うと温度があがる、つまり比熱が負であるという重力系に特有の興味ある性質を示しています。

次に Planck 分布という熱的な分布が現れた理由を考えてみましょう。これまでの導出で、 I^+ での正エネルギー解を I^- へ引き戻した解 χ_ω (2.27) の log 項が Boltzman 因子 $\exp(\frac{\pi\omega}{2\kappa})$ を出すことが計算上の理由であることがわかります。解 χ_ω は I^+ では通常の平面波解

$$\exp(i\omega u) \longrightarrow \exp(i\omega(ct - r))$$

に対応しています。ところが horizon に近づくと(2.12)(2.17) から

$$u = ct - r^*, \quad r^* = r + r_g \ln \left| \frac{r - r_g}{r_g} \right|$$

と log 的ふるまいを示し、 $r \rightarrow r_g$ で $r^* \rightarrow +\infty$ となり horizon に達するまでに無限回振動します。これは波で見た horizon までの距離が引き延ばされていることを意味しています。もちろん計量を用いた proper な距離は有限ですが、波の node の数で距離を定義すると horizon 近傍は無限に引き延ばされています。この現象は horizon に近づくことにより重力ポテンシャルが深くなり blue shift を受け波長が短くなっていくためと理解できます。この log 項で表される horizon 近傍での引き延ばしの出所は Schwarzschild 時空での normal mode のみたす波動方程式 (2.15)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\partial}{\partial v} + \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] \phi(v, r) = 0$$

で、下線部分のように微分の前の係数が horizon でゼロになる項があることです。この項は計量(2.14) の (v, v) 成分 $g_{vv} = 1 - \frac{r_g}{r}$ から来ています。さらにこの項の horizon でのゼロへの近づき方を

$$\left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \sim 2\kappa(r - r_g), \quad \kappa = \frac{1}{2r_g}$$

と特徴づける一階微分すなわち surface gravity κ が引き延ばしの強さを示す log 項の係数、ひいては黒体輻射の温度を決定しています。

少し違う方法で horizon と輻射の熱的性質の関連を示しましょう。Schwarzschild 時空(2.10) で角度部分を $d\Omega = 0$ と無視した計量

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)}$$

を考えます。horizon 近傍の時空の性質を理解するため $r - r_g = z^2/(4r_g)$ とおいて z について展開すると計量は

$$ds^2 = -(\kappa z)^2 c^2 dt^2 + dz^2, \quad \kappa = \frac{1}{2r_g}$$

となります。null 測地線 $ds^2 = 0$ を解くことで得られる null 座標 (u, v) を用いると

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct - \frac{1}{\kappa} \ln z \\ ct + \frac{1}{\kappa} \ln z \end{pmatrix} \longrightarrow ds^2 = -\kappa^2 z^2 du dv$$

と変換されます。さらに新しい null 座標 (U, V) を

$$U \equiv -e^{-\kappa u}, \quad V \equiv e^{\kappa v} \tag{2.49}$$

と導入すると

$$ds^2 = -dUdV \quad (2.50)$$

と 2 次元 Minkowski 時空の計量に変換されます。従って horizon 近傍の時空や量子状態に対しては (U, V) が自然な座標であることがわかります。一方、私たち無限遠方にいる観測者にとって自然な時間座標は t です。(2.49) において t と (U, V) の関係を見ると t の虚軸方向に $2\pi/\kappa$ の周期性があることがわかります。従って、horizon 近傍で用意された量子状態は無限遠方の観測者から見ると、 $\text{Im } t$ 方向に周期的になります。良く知られた有限温度の場の理論の議論によれば [6, p.26][7, p.103]、この周期が温度の逆数に対応するので次元を考慮すれば Hawking 温度 (2.48) が導かれます。

3 流体での Black Hole と Hawking 輻射

3.1 音波の伝搬と sonic horizon

ここまでの議論で、ブラックホールの Hawking 輻射において horizon が重要な役割をすることがわかりました。ここで horizon とは光が脱出できないブラックホール領域の境界でした。時空を流体そして光を音波に置き換えて見ましょう。私たちがいる上流から下流に向かって流れが加速され、ある点 (sonic point) で音速を超えたとします。sonic point の下流側で出された音波は私たちには到達できないので、sonic point は音波に対して (sonic) horizon の役割を果たしています。従って、sonic point が存在する流れの中での音波の伝搬に、Hawking 輻射と類似の性質があると期待できます [8, 9]。

完全流体の方程式と摂動 以下の方程式に従う完全流体を考えましょう。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p(\rho) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.2)$$

ρ, p, \mathbf{v} は流体の密度、圧力、流速です。議論を簡単にするために断熱的な理想気体

$$p = C\rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (3.3)$$

とします。 C は定数、 C_p, C_v は定圧、定積比熱です。さらに渦なし

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (3.4)$$

と仮定して速度ポテンシャル Φ を導入します。Euler 方程式(3.1) を積分すると Bernoulli 方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + h(\rho) = 0 \quad (3.5)$$

が導かれます。ただし断熱的なので

$$h(\rho) = \int^{p(\rho)} \frac{dp}{\rho} = \int^\rho \frac{c_s^2 d\rho}{\rho}, \quad c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (3.6)$$

はエンタルピーまた c_s は音速です。ここで積分定数は速度ポテンシャルに吸収させました。

次に background の流れと、そのまわりの摂動を考えます。速度ポテンシャルと密度を

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \phi, & \phi &= \delta \Phi \\ \rho &= \rho_0(1 + \psi), & \psi &= \frac{\delta \rho}{\rho} \end{aligned}$$

と background の物理量 (ρ_0, Φ_0) と摂動 (ϕ, ψ) に分けて方程式(3.2)(3.5) に代入します。まず 0 次の方程式として

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + h(\rho_0) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

さらに 1 次の方程式として

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi + c_s^2 \phi &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi + \Delta \phi + \nabla \ln \rho_0 \cdot \nabla \phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られます。ここで $\mathbf{v}_0 = \nabla \Phi_0$ は background の流速です。

一次の方程式 (3.8) において ψ を消去すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\right) \left[\frac{1}{c_s^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\right) \phi \right] - \frac{1}{\rho_0} \nabla [\rho_0 \nabla \phi] = 0$$

となります。さらに質量保存(3.2) より任意の関数 f に対して

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\right) f &= \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla + (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \right] (\rho_0 f) \\ &= \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right] (\rho_0 f) \end{aligned}$$

を満たすことが示され、速度ポテンシャルの摂動 ϕ に対する波動方程式

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_0\right) \frac{\rho_0}{c_s^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\right) \phi - \frac{1}{\rho_0} \nabla (\rho_0 \nabla \phi) = 0 \quad (3.9)$$

が導かれます。これを一般の時空でのスカラー場 Φ のみたす波動方程式(2.4)

$$\square \Phi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi \right] = 0 \quad (3.10)$$

と比較しましょう。座標を $\{x^\mu\} = (t, x, y, z) \equiv (t, x^i)$ と置くと

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{\rho_0}{c_s^2} & \frac{-\rho_0 v_0^i}{c_s^2} \\ \frac{-\rho_0 v_0^j}{c_s^2} & \rho_0 \left(\delta^{ij} - \frac{v_0^i v_0^j}{c_s^2} \right) \end{pmatrix} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

と 4 x 4 行列としての $\sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ が読みとれます。ここで α は次元を調節する定数です。 $\det(g_{\mu\nu}) = -g$, $\det(g^{\mu\nu}) = -1/g$ ですから (3.11) より $\sqrt{-g} = \rho_0^2 \alpha^2 / c_s$ となります。さらに逆行列を求めると

$$g_{\mu\nu} = \frac{\alpha \rho_0}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) & -v^i \\ -v^j & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.12)$$

となり、流体の摂動のみたす波動方程式 (3.9) が (3.12) の計量で与えられている時空中でのスカラー場の伝搬と一致していることがわかります。

計量の表す時空 この計量がどのような時空に対応するか見てみましょう。議論を簡単にするため $c_s = \text{一定}$, $\alpha\rho_0/c_s = 1$ とします。さらに流れは x 方向一次元で流速は $v^i = (v(x), 0, 0)$ 、と与えると y, z 座標を無視した 2 次元時空の線素は

$$ds^2 = -(c_s^2 - v(x)^2) dt^2 + 2 v(x) dt dx + dx^2 \quad (3.13)$$

となります。これではまだブラックホール時空との関係がはっきりしません。そこで次のように (3.13) の最初の 2 項を平方完成します。

$$ds^2 = -(c_s^2 - v^2) \left(dt - \frac{v}{c_s^2 - v^2} dx \right)^2 + \frac{c_s^2}{c_s^2 - v^2} dx^2$$

さらに新しい時間座標 τ を

$$d\tau \equiv dt - \frac{v}{c_s^2 - v^2} dx$$

のように導入すると

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{v(x)^2}{c_s^2} \right) c_s^2 d\tau^2 + \frac{dx^2}{\left(1 - \frac{v(x)^2}{c_s^2} \right)} \quad (3.14)$$

と変換されます。これを Schwarzschild 時空の計量 (2.10) と比べると

$$\begin{array}{ccc} c_s & \longleftrightarrow & c \\ \left(1 - \frac{v(x)^2}{c_s^2} \right) & \longleftrightarrow & \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \end{array} \quad (3.15)$$

という対応があり $v(x) = c_s$ すなわち流速が音速に等しくなる sonic point が音波に対する horizon の役割を果たしていることがわかります。

ここまで、sonic point のある流れでは、速度ポテンシャルのゆらぎのみたす波動方程式がブラックホール時空での光やスカラー場の方程式と等価であることを見てきました。これは、流体を用いてブラックホールの起こす最も興味ある現象の 1 つである Hawking 輻射をシミュレートできることを示唆しています。例えば、流速が $v(x) = \pm c_s \sqrt{r_g/r}$ という流れが実現できれば Schwarzschild 時空に対応されることができます。流速のプロファイルをコントロールできれば、その他のブラックホールについても Hawking 輻射のように horizon の存在に起因する物理現象をシミュレートできることが期待できます。また、2 章での議論から、流体での Hawking 輻射も Planck 分布を示し、その温度を決める surface gravity は (2.29) と同様の議論で決められます。horizon 近傍で音速 c_s が一定な場合には、

$$\kappa = \frac{1}{c_s} \left| \frac{dv(x)}{dx} \right|_{\text{sonic horizon}}$$

と sonic point での流れの速度勾配で決まります。

計量 (3.13) についてももう少し議論しましょう。この計量は

$$ds^2 = -c_s^2 dt^2 + (dx - v(x)dt)^2 \quad (3.16)$$

と表すことができます。(3.15) を用いて時空の計量に対応させると

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx - v(x)dt)^2, \quad v(x) = -\sqrt{\frac{2GM}{x}} \quad (3.17)$$

となります。上式の $v(x)$ は無限遠方での初速度ゼロでブラックホールに自由落下してゆく観測者の速度を表しています。さらに計量(3.17)は Schwarzschild 計量 (2.10) をこの自由落下する観測者の固有時間と位置 (t, x) に座標変換して得られることが知られています。horizon $x = r_g = 2GM/c^2$ で $v = -c$ と自由落下の速さが光速になっていることに注目してください。これは自由落下する観測者の座標系いわゆる局所慣性系が horizon では光速で落下していることを示しています。従ってこの慣性系から光を外向きに放出しても、慣性系自体が光速でずり落ちているため、光は外向きに伝搬することができません。これがブラックホールから光が脱出できない理由です。

3.2 Laval Nozzle

3.1 章で議論した sonic point のある一次元流れの具体例を考えましょう。図7のように、軸対称で中ほどにくびれたthroatがあり両端に向かって広がっている管路を Laval Nozzle といいます。管路の軸に沿った座標を x とし、管路の断面積 $A(x)$ が緩やかに変化する場合、流れは各断面で一様で、一次元流と見なすことができます。この等エントロピー定常流は(3.7)で時間微分をゼロにすることで得られる方程式

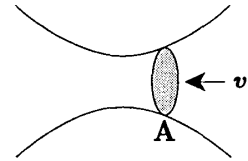


図 7: Laval Nozzle

$$J = \rho v A = \text{const.} \quad (\text{流量一定}) \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{2} v^2 + h(\rho) = \text{const.} \quad (\text{Bernoulli 方程式}) \quad (3.19)$$

で記述されます³。上の2つの式の微分を取ると

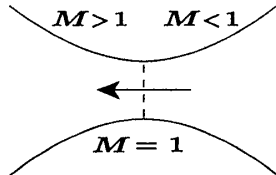
$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} &= 0 \\ v dv + c_s^2 \frac{d\rho}{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

³以後、background の流れの密度、圧力、流速を ρ, p, v と表します

となり、 $d\rho/\rho$ を消去すると

$$\left(\frac{v^2}{c_s^2} - 1 \right) \frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} \quad (3.20)$$

という関係が得られます。従って マッハ数を $M = v/c_s$ とすると Laval Nozzle での流れは



$$\begin{aligned} M < 1 \quad dA < 0 &\longrightarrow dv > 0 \\ M > 1 \quad dA > 0 &\longrightarrow dv > 0 \end{aligned}$$

図 8: Laval Nozzle での加速 となり亜音速では nozzle の断面積を減少させた方が方が加速され、超音速では nozzle を断面積を増加させた方が加速されることがわかります。さらに、(3.20) から断面積が最小になる throat ($dA = 0$) が sonic point $M = 1$ になっているので図 8 のような流れが実現されます。

断熱的な理想気体なので(3.3) よりエンタルピー h と音速 c_s は

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (3.21)$$

となります。さらに図 9(a) のように上流のある位置での密度と圧力を ρ_u, p_u 、そこでの流速がゼロすなわち $v_u = 0$ とすると Bernoulli 方程式(3.5) は

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_u}{\rho_u} \quad (3.22)$$

で与えられます。無次元化した密度を $x \equiv \rho/\rho_u$ とおくと、無次元化された圧力は $p/p_u = x^\gamma$ となり Bernoulli 方程式から

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_u}{\rho_u} (1 - x^{\gamma-1}) \quad (3.23)$$

と流速が求められます。throat で単位面積あたりの流量

$$J/A = \rho v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \rho_u p_u x^2 (1 - x^{\gamma-1})} \quad (3.24)$$

が最大になっていることから throat での x が

$$x_{th} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (3.25)$$

と得られ、そこで流速と音速が

$$v = c_s = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_u}{\rho_u}} \quad (3.26)$$

と等しくなっていることが示されます。図9(b)に Laval Nozzle での流速と音速と $x = \rho/\rho_u$ の関係をグラフにします。上流での音速 $c_{su} = \sqrt{\gamma p_u/\rho_u}$ で規格化してあります。

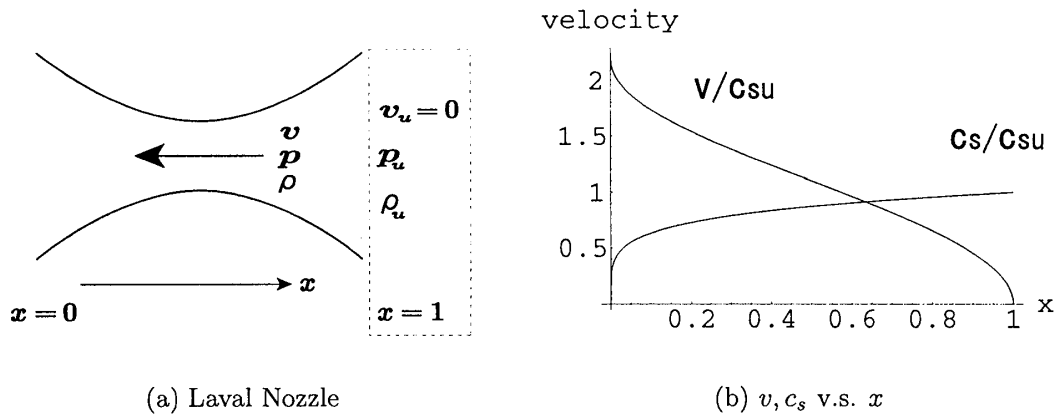


図 9: Laval Nozzle での流速 v と音速 c_s の変化。 $c_{su} = \sqrt{\gamma p_u/\rho_u}$ は上流での音速。
 $x = \rho/\rho_u$, $\gamma = 7/5$

3.3 Hawking 輻射の古典的対応物

Normal mode の WKB 近似 Laval Nozzle での具体的な流れを用いて Hawking 輻射の解析を行いましょう。図9の一次元流れに対する計量は

$$g_{\mu\nu} = \frac{\alpha\rho}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & v & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = c_{su}/\rho_u \quad (3.27)$$

で与えられます。ここで密度、音速、流速は

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_u} &= x & \frac{c_s}{c_{su}} &= x^{(\gamma-1)/2} \\ \frac{v}{c_{su}} &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} (1 - x^{\gamma-1})} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となります。ここで流速は図9のように $-x$ 方向を正にとってあります。ここでは具体的な流れのプロファイルとして(3.28)の $x = \rho/\rho_u$ が空間座標の x と一致している、つまり密度が x 座標に比例する場合を考えます⁴。しかしこれからの解析では、プロファイルの具体的な x 依存性はあまり関係なく、sonic point および漸近的に流速ゼロ（あるいは一定）の領域が存在することだけが重要です。対応する波動方程式(3.9)で

$$\phi(t, x) \equiv e^{-i\bar{\omega}t} \varphi(x) \quad (3.29)$$

と形を仮定して⁵代入すると

$$\bar{\omega}^2 \frac{\rho}{c_s^2} \varphi - i\bar{\omega} \left[\frac{\rho v}{c_s^2} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho v}{c_s^2} \varphi \right) \right] + \frac{d}{dx} \left[\rho \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2} \right) \frac{d\varphi}{dx} \right] = 0$$

が得られます。さらに

$$\varphi(x) \equiv \exp \left(i \int k(x) dx \right) \quad (3.30)$$

とにおいて WKB 近似つまり、流速や波数の変化が波長に比べて緩やかである

$$\frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dx} \right) \cdots \frac{1}{k} \left(\frac{dk}{dx} \right) \ll k$$

と仮定すると最低次の方程式は

$$\left[\bar{\omega}^2 \frac{\rho}{c_s^2} + 2 \frac{\rho v}{c_s^2} k \bar{\omega} - \rho \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2} \right) k^2 \right] \varphi = 0$$

となります。これから分散関係

$$(c_s^2 - v^2) k^2 - 2 \bar{\omega} v k - \bar{\omega}^2 = 0 \quad (3.31)$$

が導かれ、それを解くと2つの解

$$k = \begin{cases} \frac{\bar{\omega}}{c_s - v} \equiv k_{out} & \text{out-going} \\ -\frac{\bar{\omega}}{c_s + v} \equiv k_{in} & \text{in-going} \end{cases} \quad (3.32)$$

が得られます。この中で (3.29)(3.30) に k_{out} を代入して作られる mode が sonic horizon から流れに逆らって伝搬し充分遠方で観測されるので Hawking 輻射に関

⁴実際には長さのスケール L が必要です。

⁵2章の ω とは次元が異なるので $\bar{\omega}$ という記号を用いました。

連していると予想されます。流速 v が漸近的にゼロになっている場合はこの mode の角振動数は $\bar{\omega}$ 波数は $\bar{\omega}/c_{su}$ です。Background の流れが定常なので角振動数 $\bar{\omega}$ は保存しますが、 x 方向について一様な流れではないので波数 k は(3.32) のように場所により変化します。out-going mode の波数 k_{out} の表式は流速 $-v$ に逆らって伝搬する音波の effective な音速が $c_s - v$ であることを示しています。これは計量(3.17) すなわちブラックホール時空を自由落下する観測者の座標系で見たときと同じ事情です。さらに注目すべきことに horizon に近づくにつれ k_{out} は大きくなり、波の node の数で定義された距離は発散します。つまり 2 章の最後で述べた Hawking 輻射が Planck 分布に従う原因であった **horizon** 近傍での引き延ばしが sonic horizon 近傍でも起こっているのです。この引き延ばしの効果は sonic horizon で k_{out} が一次の極をもつために、 \log 項が積分から現れることから見取れます。これを具体的に計算してみましょう。長さのスケール L を導入して $\rho/\rho_u = x/L$, $p/p_u = (x/L)^\gamma$ とすると(3.21)(3.23) より

$$\frac{c_s - v}{c_{su}} = \left(\frac{x}{L}\right)^{(\gamma-1)/2} - \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^{\gamma-1}\right)}$$

となり sonic point x_{th} の近傍での座標 z

$$x = x_{th} + z, \quad \frac{x_{th}}{L} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

を導入すると surface gravity κ は

$$\frac{c_s - v}{c_{su}} \sim \kappa z, \quad \kappa = \frac{1}{L} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(2\gamma-3)/2(\gamma-1)} \quad (3.33)$$

となります。従って out-going mode の WKB 近似解は horizon 近傍 ($z \sim 0$) で

$$\begin{aligned} \phi_\omega^{out} &= \exp\left(i \int k_{out} dx\right) \\ &= \exp\left(i \frac{\bar{\omega}}{c_s \kappa} \ln z\right) = z^{i\bar{\omega}/c_s \kappa} \end{aligned} \quad (3.34)$$

となり 2.2 章での mode(2.27) と完全に一致します⁶。

Hawking 輻射の古典的対応物 Normal mode の解析的な性質がブラックホールのそれと一致しているので、流体での sonic horizon でも原理的には Hawking 輻射すなわち粒子生成が起こります。しかしこの過程が真空が変化することにより

⁶次元から見ても明らかなように 2.2 章の ω に対応するのは $\bar{\omega}/c_s$ です。

引き起こされる量子論的特有の現象であることを忘れてはいけません。従って流体での Hawking 輻射が起こるためには流体全体にわたって量子コヒーレンスが保たれていることが必要不可欠です。sonic point をもつマクロな流体においてそのような量子性を維持することは非常に困難なので、ここでは Hawking 輻射の古典的対応物を議論しましょう。

まず図 10 を見ながら、もう一度 Hawking 輻射の機構をおさらいしましょう。第

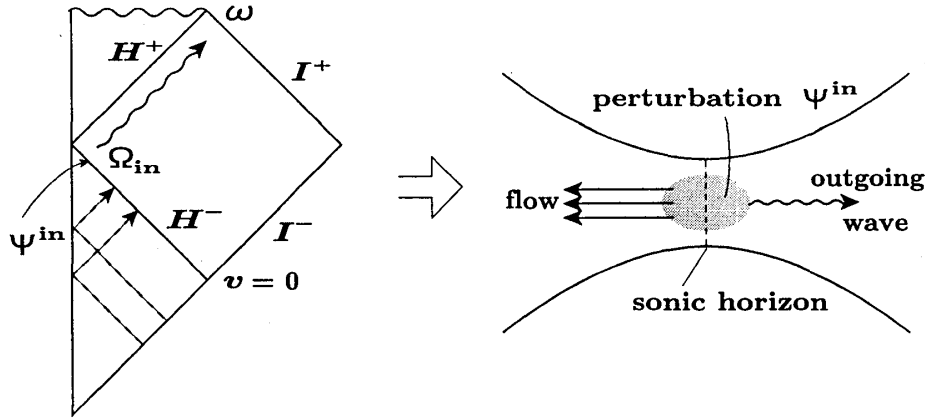


図 10: ブラックホールと Laval Nozzle の比較

2章では、 I^+ での正エネルギー解を I^- まで引き戻し、そこでの normal mode で展開して Bogolubiv 係数を求めました。しかし mode が I^- から星の中心 $r = 0$ に落ちていくあいだは horizon がまだ形成されていないので、log 項を生み出す引き延ばしの効果は受けません。言い換えると horizon の影響は null 測地線が図 10 (左) の波線のように H^+ に平行に伝搬するあいだにのみ現れます。また同じ図で点線で示されているように I^- ($v < 0$) から出た mode は $r = 0$ で跳ね返されて H^- に達します。従って、(2.41)(2.43) のように I^- でスカラー積を計算して Bogolubov 係数を必要はなく、同様の計算を H^- で行うことが可能です。さらに H^- の中でも horizon H^+ に近い部分、すなわち図 10 (左) の Ψ^{in} で示されている horizon 近傍を伝搬する mode が horizon による引き延ばしの効果を強く受けると予想されます。2.3 章の最後の部分での議論から、この horizon 近傍での自然な out-going null 座標は (2.50) のように

$$U = -\exp(-\kappa u) \quad (3.35)$$

なので、ここでの正エネルギー解（振動数 Ω_{in} ）に対応する normal mode は

$$\Psi^{in} = \exp(-i\Omega_{in}U) \quad (3.36)$$

で与えられます。Bogolubov 係数の計算は、この Ψ^{in} と、 I^+ から正エネルギー解

$\phi_\omega^{out} = e^{-i\omega u}$ を horizon H^+ に平行に H^- まで引き戻した mode

$$\phi_\omega^{out} = \exp(-i\omega u) \longrightarrow \exp\left(-i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-U)\right) \quad (3.37)$$

のあいだのスカラー積になり (2.41)(2.43) と同じ結果が得られます。

ここで量子論から古典論に議論を移しましょう。horizon 近傍で out-going wave Ψ^{in} を発射し、その Fourier 成分を I^+ で観測したとしましょう。対応する Fourier 変換を H^- 上 horizon 近傍で実行すると各振動数成分は

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int dU \Psi^{in} \phi_\omega^{out*} \\ &= \int dU \exp\left\{-i\Omega_{in}U + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-U)\right\} \end{aligned}$$

で与えられます [10]。同じことを流体で行いましょう。つまり sonic horizon 近傍で古典的な out-going wave $\Psi^{in} = \exp(-i\Omega_{in}z)$ を打ち出し、その周波数成分を充分遠方の上流で観測します。この場合上流での振動数 $\bar{\omega}$ の平面波は sonic horizon 近傍では (3.34) で与えられます。従って上流で観測される Fourier 成分は

$$\begin{aligned} f(\bar{\omega}) &= \int_0^\infty dz e^{-i\Omega_{in}z} z^{i\bar{\omega}/c_s\kappa} \\ &= i\Omega_{in}^{-(1+i\bar{\omega}/c_s\kappa)} \exp\left(-\frac{\pi\bar{\omega}}{2c_s\kappa}\right) \Gamma\left(1 + i\frac{\bar{\omega}}{c_s\kappa}\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

と Γ 関数で表されます。これから上流で観測される波の Power spectrum を求めると

$$|f(\omega)|^2 \propto \frac{2\pi\bar{\omega}}{c_s\kappa} \frac{1}{e^{2\pi\bar{\omega}/c_s\kappa} - 1}$$

(3.39)

と Planck 分布に比例する形が得られます [11]。

Power spectrum (3.39) について幾つかコメントします。まずこの結果は、Hawking 輻射での生成される粒子数(2.47) の古典的対応物とみなすことができます。そう考えて (2.47) を眺めると、この結果がブラックホール時空での量子場の理論からの帰結であったのにもかかわらず \hbar が現れていないことに気づきます⁷。しかしこれは、角振動数 ω の関数として表したことが原因で、粒子のエネルギーの表式 $E = \hbar\omega$ を通じて \hbar が現れます。実際、Hawking 温度(2.48) には \hbar が登場しています。次に、この Power spectrum は、(sonic) horizon 近傍に加えられた摂動が流れに逆らって無限遠方の観測者に到達するあいだに受ける引き延ばし効果に起因するもので、normal mode の解析的性質は反映していますが、真空が変化する粒

⁷Introduction で述べたように、第2章での計算では c, \hbar を陽に残しています。

子生成ではありません。最後に、Power spectrum (3.39) は sonic horizon で与えた摂動 (out-going wave) $\Psi^{in} = \exp(-i\Omega_{in}z)$ の振動数 Ω_{in} に依存していません。ここで行った古典的な計算では、初期条件として sonic horizon で摂動を与えその伝搬を解いているので、初期条件に対する依存性がないことは奇妙な印象を与えます。これは、horizon 近傍での WKB 近似解 (3.34) を用いて Power spectrum を計算していることが原因だと考えられます。きちんと初期値問題を解いて Power spectrum を求めると (3.39) 以外に初期条件は流れの詳細に依存する部分が現れます。従って、実際に実験を行った場合、sonic horizon のあたりに摂動を与えると、まず、初期条件に依存する部分が伝搬してきて減衰するのが観測されます。その後、摂動の中で horizon に非常に近いところに与えられた部分の寄与がじわじわと伝わってきます。この後者の Power spectrum が普遍的に Planck 分布 (3.39) を示すと考えられます。

4 まとめと議論

本解説では、まずブラックホール時空での Hawking 輻射について、特に horizon の果たす役割に焦点を置いて解説しました。次に時空を流体、光を音波に置き換えることで流速が音速と等しくなる sonic point が horizon と同じ性質をもち、音波に対する Hawking 輻射が存在しうることを議論しました。この流体での Hawking 輻射は、ブラックホールの場合と異なり、原理的には実験できるので非常に興味ある現象です。しかし、Hawking 輻射が horizon の形成により真空が変化し粒子生成が起こるという量子場の理論特有の現象なので、流体全体にわたって量子性が維持されていなければなりません。そこで、本解説では実際に Laval nozzle 等の sonic point をもつ流れで実験できる可能性のより高い古典的な観測量を議論しました。Hawking 輻射の特徴は

- (1) 真空が変化することによる粒子生成
- (2) Planck 分布という熱的分布

の2点です。3.3 章で議論した sonic horizon から出てくる古典的な波の Power Spectrum (3.39) は当然のことながら (2) にしか対応していません。従って、粒子生成によりブラックホールがエネルギーを失うという蒸発過程のシミュレーションにはなっていません。しかし実験室での Hawking 輻射のシミュレーションという観点では系の量子コヒーレンスを保つ必要ない Power Spectrum は、粒子数のような他の量子論的な物理量に比べて実験・観測が容易なので重要です。さらに、Power Spectrum という物理量は Planck 分布の起源を

horizon がその近傍を伝搬する波に与える引き延ばし効果の結果として現れる波の解析的性質

と端的に示してくれます。これは、ブラックホールの熱力学という文脈で考えると horizon のもつ近傍での引き延ばしやその内部の情報を見せないという kinematical な性質と Planck 分布さらにエントロピーという熱力学的概念のあいだに一般的な対応がある、という興味ある可能性を示唆していると思います。

また第3章では、完全流体の場合のみを議論しました。粘性のある Navier-Stokes 方程式に従う流体についての解析はこれからの課題です。ただし、粘性とは異なりますが、流体を構成する原子の discreteness の効果を念頭に置いて、速度ポテンシャル ϕ のみたす波動方程式(3.9)に高次の空間微分を含めた解析があります。これは(3.32)で示されているように、sonic horizon 近傍での引き延ばしの結果、波数が大きくなり流体の小さなスケールの構造が見えてくる可能性があるからです。高階微分を含めた解析では、予想に反して Hawking 輻射の spectrum はあまり大きな影響を受けないことが示されています [12, 13]。従って、粘性の効果についても spectrum にあまり影響を与えないだろうと考えています。

謝辞

本解説は2000年5月に京都大学総合人間学部、人間・環境学研究科の物性理論グループで行ったセミナーの内容にその後の発展を加筆したものです。このテーマに興味を持ち、本解説を執筆する機会を与えて下さった、早川尚男助教授に感謝します。

A Appendix A: 一般相対論の基礎

A.1 計量

まず2次元 Euclid 空間 (2次元平面) E^2 を考え、平面上のデカルト座標を (x, y) とします。無限小離れた2点の座標の差を (dx, dy) とするとこの2点間の距離は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (\text{A.1})$$

で与えられ、2次元平面 (E^2) の線素と呼ばれます。この線素は、デカルト座標に $(x^1, x^2) = (x, y)$ という名前を付けると

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j \equiv g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{A.2})$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーデルタ記号})$$

と表されます。ここで (A.2) 式のように上下に同じ添字が現れたときは原則として和をとることにします。この空間の距離を特徴づける対称テンソル g_{ij} は計量また

は計量テンソルとよばれます。同じ空間を極座標 (r, φ) で考えると線素は

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & dx &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ y &= r \sin \varphi & dy &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

より、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (\text{A.4})$$

となり、計量は

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(1, r^2)$$

で与えられます。このように同じ空間でも座標により線素や計量の形が変わります。ここでは触れませんが、座標によらない空間の性質は曲率などの幾何学量に反映されます [2]。

2次元球面 次に曲がった空間の例として S^2 (2次元球面) を取り上げます。3次元ユークリッド空間 E^3 に具体的に半径 a の球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (\text{A.5})$$

を埋め込んで見ましょう。条件 (A.5) の微分と E^3 の計量

$$xdx + ydy + zdz = 0 \quad (\text{A.6})$$

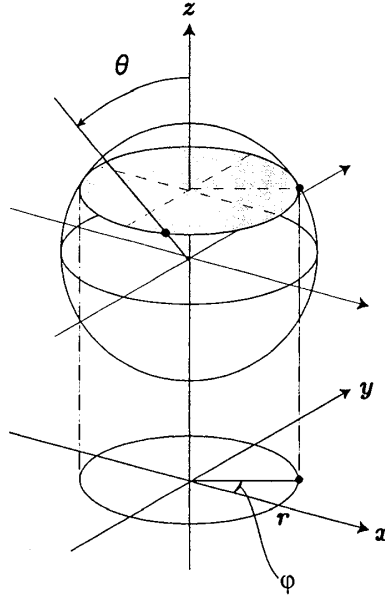
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.7})$$

から z 座標を消去し、さらに関係式 (A.3) をもちいて (r, φ) 座標に移ると S^2 の線素

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 d\varphi^2 \quad (\text{A.8})$$

が得られます。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ は図 11 のように $x - y$ 平面に射影した距離であることに注意してください。2次元平面 E^2 の線素 (A.1) と比較すると距離 (線素) の違いがわかります。さらに線素 (A.8) の右辺第一項が積分できるので

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = a d\theta$$


 図 11: S^2 の (r, φ) 座標と θ 座標

となる θ 座標を導入できます。この θ は S^2 上の自然な座標で $r = a \sin \theta$ を充たします。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

から (θ, φ) が極座標を張ることがわかります。さらにこの座標では S^2 の線素は

$$ds^2 = a^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{A.10})$$

という形になります。ここで $d\Omega^2$ は単位 2 次元球面の線素です。この線素 (A.10) に見ると、半径 $\chi = a\theta$ を一定にして ($d\theta = 0$) 角度 φ について 2π 回して円を描いたときその円周の長さが

$$l = 2\pi a \sin \theta \quad (< 2\pi \chi)$$

となることがわかります。2 次元平面での円周 $2\pi\chi$ より円周が短くなっている度合いが空間の曲率を表しています。

時空の計量と因果律 時空の因果的構造も計量により理解できます。4 次元 Minkowski 時空の線素は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.11})$$

で与えられ、平坦な時空を表しています。座標に $\{x^\mu\} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ という名前をつけると

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (\text{A.12})$$

となります。計量の空間部分は E^3 と同じですが、時間部分の符号が負になっているため、いままでの空間に対する線素と異なり正定値ではありません。

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

という関係を用いて座標を $\{x^\mu\} = (ct, r, \theta, \varphi)$ と極座標に変換すると 4 次元 Minkowski 時空の線素は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{A.14})$$

となります。ここで近くにある 2 つの時空点 P, Q を考えましょう。それぞれの座標を $x^\mu(P), x^\mu(Q)$ とすると Q から P へ向かうベクトルは $dx_{QP}^\mu = x^\mu(P) - x^\mu(Q)$ で与えられます。点 Q を座標の原点とすると角度 θ, φ の変化はゼロなので $\{dx_{QP}^\mu\} = (cdt, dr, 0, 0)$ 従って 2 点の距離 (の 2 乗) は

$$ds_{QP}^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 \quad (\text{A.15})$$

となります。この符号により

$ds_{QP}^2 > 0$	点 Q, P は互いに spacelike	dx_{QP}^μ は spacelike ベクトル
$ds_{QP}^2 < 0$	点 Q, P は互いに timelike	dx_{QP}^μ は timelike ベクトル
$ds_{QP}^2 = 0$	点 Q, P は互いに null	dx_{QP}^μ は null ベクトル

と区別されます。2 点 P, Q が spacelike な場合、お互いに因果関係はなく、時間についての前後関係も相対的で観測者の座標系によって入れ替わってしまいます。また、timelike な場合は

$dx_{QP}^0 = x^0(P) - x^0(Q) > 0$	点 P は点 Q に対して future timelike
$dx_{QP}^0 = x^0(P) - x^0(Q) < 0$	点 P は点 Q に対して past timelike

といいます。これにより点 Q に対して Minkowski 時空は、図 12 のように点 Q の未来 (future timelike)、過去 (past timelike) そしてどちらでもない spacelike 領域の 3 つの領域に分けられます。これらの領域の境界は点 Q を null の関係にある領域で、点 Q を通る光の軌跡 (null 測地線) の集合で、光円錐 (lightcone) と呼ばれます。

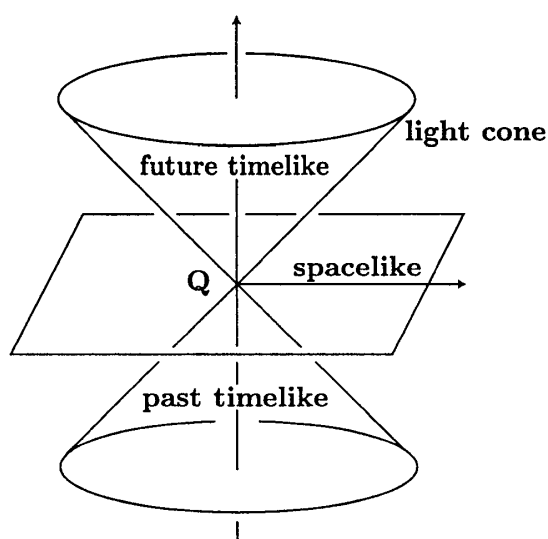


図 12: Minkowski 時空

上の議論からわかるように、光の軌跡（null 測地線）は $ds^2 = 0$ を解くことで求められます。Minkowski 時空での点 Q（原点）を通る null 測地線の場合 (A.15) 式より

$$ds_{QP}^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 = 0, \quad d\theta = d\varphi = 0$$

から

$$r = \pm c(t - t_0), \quad \theta = \varphi = \text{一定}$$

と動系方向伝搬する null 測地線が得られます。もちろん一般の時空でも $ds^2 = 0$ で光の軌跡が得られることは言うまでもありません。

A.2 テンソル

一般相対論ではスカラー、ベクトル、テンソルは一般座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x) \quad (\text{A.16})$$

に対する変換性で定義されます。変換 (A.16) に対して

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x) \quad (\text{A.17})$$

と同一時空点での値が不変なとき $\Phi(x)$ をスカラー場といいます。またベクトルは

$$V^\mu(x) \rightarrow V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad \text{反変ベクトル} \quad (\text{A.18})$$

$$V_\mu(x) \rightarrow V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad \text{共変ベクトル} \quad (\text{A.19})$$

と添字の上下に対応して2つのタイプがあります。反変ベクトルの例としては、座標の無限小変位

$$dx^\mu \longrightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (\text{A.20})$$

共変ベクトルの例としては、スカラー場の微分

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi(x) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi(x) \quad (\text{A.21})$$

が挙げられます。

テンソルについては具体例だけを挙げることにすると、まず計量テンソルが2階共変テンソルの代表例です。

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \quad (\text{A.22})$$

次のように計量テンソルと反変ベクトル A^μ, B^μ との縮約（上下の同じ添字での和） $g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ はスカラーなので座標系によらない不変量で反変ベクトルの内積を与えます。従って線素 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ が不変な距離を表していることも明らかだと思います。計量テンソルの逆 $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad \delta^\mu_\nu = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \quad (\text{A.23})$$

をみだし

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.24})$$

と変換する2階反変テンソルで、 $g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$ と共変ベクトルの内積を与えます。

A.3 共変微分

反変ベクトルの変換則 (A.18) を見ると変換行列 $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$ は時空点の関数であり変換のしかたは一般に場所によって異なります。従って一般には2つの異なる点の和（差）

$$A^\mu(x) \pm B^\mu(x')$$

はベクトルではないことに注意しなければなりません。無限小変位を δx^μ とするとベクトルの微分 $\partial A^\mu / \partial x^\nu$ は

$$\delta x^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = A^\mu(x + \delta x) - A^\mu(x) \quad (\text{A.25})$$

と異なる場所のベクトルを比べなければならぬのでテンソルになりません。これを解決するために x^μ のベクトル $A^\mu(x)$ を $x^\mu + \delta x^\mu$ のベクトル $A^\mu_{\parallel}(x + \delta x)$ に関係づける "平行移動" を考える必要があります。詳しいことは省きますが無限小平行移動は

$$A^\mu_{\parallel}(x + \delta x) \equiv A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) A^\alpha(x) \delta x^\beta \quad (\text{A.26})$$

と定義されます [2, pp.18-19]。ここで $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ は connection とよばれ

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}(x) \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} \right) \quad (\text{A.27})$$

で与えられます。この平行移動 (A.26) をもちいて反変ベクトル A^μ に対する共変微分 ∇_μ は

$$\delta x^\nu \nabla_\nu A^\mu \equiv A^\mu(x + \delta x) - A^\mu_{\parallel}(x + \delta x) \quad (\text{A.28})$$

と定義され

$$\nabla_\nu A^\mu \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} A^\rho \quad (\text{A.29})$$

となります [2, p.20]。ちなみにスカラー場に対しては (A.21) 式のように微分がベクトルとして変換するので

$$\nabla_\mu \Phi(x) \equiv \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.30})$$

とスカラー場の共変微分は偏微分に一致します。

A.4 ラプラス演算子

ベクトルの発散 反変ベクトル A^μ の発散は共変微分 (A.29) の上下の添字をそろえて和をとったスカラー

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu} A^\rho \quad (\text{A.31})$$

で与えれ、一般の時空では発散を計算するためには connection を知っていなければなりません。ただし (A.31) ではすべての connection が必要なわけではなく、上下の添字をそろえて縮約をとったものだけです。うまい具合に

$$\Gamma^\mu_{\rho\mu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\rho} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^\rho}, \quad g = \det g_{\mu\nu} \quad (\text{A.32})$$

という公式があり [2, pp.45-46] 計量の行列式から求められます。(A.32) を (A.31) に代入すると

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{|g|} A^\mu) \quad (\text{A.33})$$

となります。

ラプラス演算子 ここで A^μ としてスカラー場の微分つまり

$$A^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\nu \Phi = g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}$$

を (A.33) に代入してみましょう。すると

$$\square \Phi \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) \quad (\text{A.34})$$

とラプラス演算子の表式が得られます。具体例としてまず単位 2 次元球面 (A.10)

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

を取り上げましょう。この場合 $\{x^\mu\} = (\theta, \varphi)$,

$$g = \sin^2 \theta, \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, \sin^{-2} \theta)$$

より

$$\square_{S^2} \Phi = \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Phi \quad (\text{A.35})$$

と、いわゆる角運動量演算子が得られます。他の例として 4 次元 Minkowski 時空 (A.11, A.12)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

を考えるとこの場合は $\det \eta_{\mu\nu} = -1$, $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ となり、ダランベール演算子

$$\square \Phi = \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi \quad (\text{A.36})$$

が得られます。

B Appendix B: 場の量子化

B.1 調和振動子と生成・消滅演算子

まず、次の Lagrangian

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \quad (\text{B.1})$$

で与えられる調和振動子の量子化を復習しましょう。共役運動量

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \quad (\text{B.2})$$

により Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \quad (\text{B.3})$$

となり、正準交換関係

$$[q, p] = i\hbar \quad (\text{B.4})$$

で量子化されます。生成・消滅演算子を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{m\omega}q + \frac{ip}{\sqrt{m\omega}}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{m\omega}q - \frac{ip}{\sqrt{m\omega}}) \quad (\text{B.5})$$

と定義すると、これらは交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{B.6})$$

をみたし、Hamiltonian は

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right), \quad N = a^\dagger a \quad (\text{B.7})$$

と表わされます。また、

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (\text{B.8})$$

より a (a^\dagger) は量子数を減少 (増加) させることがわかります。

調和振動子の基底状態 (真空) は、消滅演算子をもちいて

$$a |0\rangle = 0 \quad (\text{B.9})$$

と定義され、 n 量子状態はそれに生成演算子を作用させて

$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n-1}}|n-1\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (\text{B.10})$$

と構成され

$$H |n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle \quad (\text{B.11})$$

と n 番目のエネルギー状態になっています。

B.2 スカラー場：無限自由度の調和振動子

今までの議論の多自由度の調和振動子への拡張は

$$(q(t), p(t)) \rightarrow (q_i(t), p_i(t)), \quad i = 1 \dots N$$

と N 自由度の変数に置き換えそれらに正準交換関係

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

を課すことで行えます。さらにスカラー場との対応は

$$i \rightarrow \mathbf{x} = (x, y, z), \quad q_i(t) \rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) \quad (\text{B.12})$$

と空間の各点に調和振動子の自由度を張り付けることで関係づけられます。 N 自由度の量子力学とスカラー場の量子論の対応を表 1 に示しておきます。

	N 自由度量子力学	スカラー場の量子論
自由度のラベル	i	$\mathbf{x} = (x, y, z)$
変数	$q_i(t), i = 1 \dots N$	$\Phi(t, \mathbf{x})$
Lagrangian	$\sum_{i=1}^N \left(\frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{m}{2} \omega_i^2 q_i^2 \right)$	$\int d\mathbf{x}^3 \left(\frac{1}{2c^2} \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right)$
共役運動量	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}(t, \mathbf{x})} = \dot{\Phi}(t, \mathbf{x})/c^2$
Hamiltonian	$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{m\omega_i^2}{2} q_i^2 \right)$	$\int d\mathbf{x}^3 \left(\frac{c^2}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right)$
正準交換関係	$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$	$[\Phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{x}')] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$
運動方程式	$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t, \mathbf{x}) - \nabla^2 \Phi(t, \mathbf{x}) = 0$

表 1: N 自由度量子力学とスカラー場の量子論の対応

表記を簡略にするために次のような微分記号

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

を導入します。すると表1のスカラール場の Lagrangian は

$$\begin{aligned} L &= \int dx^3 \left(\frac{1}{2c^2} \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right) \\ &= - \int dx^3 \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi, \quad \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

運動方程式は

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \Phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\longrightarrow \partial_\mu \partial^\mu \Phi = \square \Phi = 0 \quad (\text{B.15})$$

と表すことができます。波動方程式(A.36)と比較すると、ここで考えているのが Minkowski 時空での質量ゼロのスカラール場の量子論であることがわかります⁸。

B.3 Normal mode と真空

ノルムと Normal mode 調和振動子の量子化では生成・消滅演算子が重要な役割を果たしました。スカラール場の量子化では、この生成・消滅演算子を導入するのに少し工夫が必要です。そのためスカラール場の運動方程式(B.14)(B.15)の古典解

$$\Phi \propto e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad e^{+i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \omega = c|\mathbf{k}| \quad (\text{B.16})$$

を利用します。まずこの解の規格化を行うためにノルムを導入します。このスカラール場の方程式(B.15)の2つの解を ϕ_1, ϕ_2 とすると

$$\partial_\mu [\phi_1 \partial^\mu \phi_2^* - (\partial^\mu \phi_1) \phi_2^*] = 0$$

が成り立ちます。ここで * は複素共役を示しています。上の式は次のような保存則

$$\partial_\mu J^\mu(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$J^\mu(\phi_1, \phi_2) \equiv i [\phi_1 \partial^\mu \phi_2^* - (\partial^\mu \phi_1) \phi_2^*]$$

として表すことができます。この保存則は時間成分を $\rho \equiv J^0$ 空間成分を $\mathbf{J} \equiv (J^1, J^2, J^3)$ と表すと

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} = 0$$

となり量子力学での確率保存と同じ形なので、 J^0 を時間 t を一定にして空間積分した

$$\int_{t=\text{const}} d^3x \quad J^0(\phi_1, \phi_2)$$

⁸質量が m の場の方程式は $(\square - m^2)\Phi = 0$ です。

が時間に依らない保存量であることは容易に示すことができます。従ってスカラー場方程式 (B.14) の解の保存するノルムとして

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv -i \int d^3x \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2^*}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \phi_2^* \right) \quad (\text{B.18})$$

が導入できます。

以上の議論から方程式 (B.14) の 2 種類の解 (normal mode)、正エネルギー解 (positive frequency mode) と負エネルギー解 (negative frequency mode) を考えます。

<p>正エネルギー解</p> $u_{\mathbf{k}} = \frac{\exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}$ $i \frac{\partial u_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \omega u_{\mathbf{k}}$ $(\omega = c \mathbf{k} > 0)$	<p>負エネルギー解</p> $u_{\mathbf{k}}^* = \frac{\exp(+i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \quad (\text{B.19})$ $i \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^*}{\partial t} = -\omega u_{\mathbf{k}}^* \quad (\text{B.20})$
--	--

これらの normal mode を ノルム (B.18) に代入すると簡単な計算で

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') & (u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^*) &= -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^*) &= 0 & (u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

と正規直交化されていることが示されます。ただし負エネルギー解はノルムが負になっています。

上の議論ではではノルム(B.18)の積分範囲は $-\infty < x, y, z < \infty$ と無限体積にわたり、解(B.19)の振動数と波数 ω, \mathbf{k} は連続的に分布し、normal modeの正規直交関係にはデルタ関数が現れています。これとは別に、normの積分範囲を一辺の長さが L の立方体にとり、normal modeには周期境界条件を課す **box normalization** というやり方もあります。この場合 normal mode は

<p>正エネルギー解</p> $u_{\mathbf{k}} = \frac{\exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}{\sqrt{2\omega L^3}}$ $\omega = c \mathbf{k} > 0$ $\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi i}{L}, \frac{2\pi j}{L}, \frac{2\pi l}{L} \right)$	<p>負エネルギー解</p> $u_{\mathbf{k}}^* = \frac{\exp(+i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}{\sqrt{2\omega L^3}} \quad (\text{B.22})$ $(i, j, l \text{ は整数}) \quad (\text{B.23})$
--	--

となり波数 \mathbf{k} はとびとびの値を取ります。さらに、正規直交関係は

$$\begin{aligned} (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} & (u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^*) &= -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^*) &= 0 & (u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

とクロネッカーデルタになります。

生成・消滅演算子 次に normal mode を使って、場の演算子 Φ を

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = c\hbar^{1/2} \int d^3k \left(a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) \right) \quad (\text{B.25})$$

と展開します。ここでの議論は box normalization の場合には

$$\boxed{\begin{aligned} \int d\mathbf{k} &\longrightarrow \sum_{\mathbf{k}} \\ \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') &\longrightarrow \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}} \quad (\text{B.26})$$

と置き換えてください。 $a_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^\dagger)$ が生成 (消滅) 演算子であることを示しましょう。正規直交関係 (B.21) より

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{c\hbar^{1/2}} (\Phi(t, \mathbf{x}), u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{c\hbar^{1/2}} \int d^3x \ u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x}) (\omega \Phi(t, \mathbf{x}) + ic^2 \Pi(t, \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

同様に

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{c\hbar^{1/2}} \int d^3x \ u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) (\omega \Phi(t, \mathbf{x}) - ic^2 \Pi(t, \mathbf{x})) \quad (\text{B.28})$$

が得られます。ただし $\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{x}) / c^2$ は共役運動量です。同時刻での交換関係

$$[\Phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{x}')] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.29})$$

から

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= (u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) \\ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

を充たすことが示されます。

ここまでで、量子力学での生成・消滅演算子の定義 (B.5) とその交換関係 (B.6) の導出にあたることを場の理論で行いました。次に (B.7) に対応して Hamiltonian

$$H = \int d^3x \left(\frac{c^2}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right) \quad (\text{B.31})$$

を生成・消滅演算子で表しましょう。場の演算子の展開(B.25) から $\Pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \mathbf{x})/c^2$ と $\nabla\Phi$ を計算して (B.31) に代入します。normal mode (B.19) の具体形から得られる積分

$$\begin{aligned}\int d^3x u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}^*(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2\omega} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ \int d^3x u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x}) &= \frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\end{aligned}$$

を利用すると

$$H = \int d^3k \hbar\omega \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.32})$$

が導かれ、 $a_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^\dagger)$ が波数 \mathbf{k} 、エネルギー $\hbar\omega = \hbar c|\mathbf{k}|$ の粒子の生成・消滅演算子であることがわかります。

真空の定義 調和振動子では消滅演算子を用いて(B.9) 式で基底状態を定義しました。場の量子論では、これに対応して

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \text{for } \forall \mathbf{k} \quad (\text{B.33})$$

で粒子の存在しない真空状態を定義します。

ここで、真空は消滅演算子の全体 $\{a_{\mathbf{k}}\}$ に対して定義されていることに注意しなければなりません。場の演算子の展開(B.25) からわかるように正エネルギー解全体で真空が決められると言うこともできます。ある座標系 $\{x^\mu\}$ で定義された真空を、それに対して等速度運動する座標系 $\{x'^\mu\}$ から観測したとしましょう。場の方程式(B.15) はスカラーなのですが、個々の解は Lorentz 変換に従って形を変えます。しかし正エネルギー解の全体が張る関数空間が Lorentz 変換に対して不変、言いかえると Lorentz 変換で正エネルギー解と負エネルギー解が混じり合うことがないことが示せます。この事実が等速運動している観測者から見ても真空が同じである、つまり真空の Lorentz 不変性を保証しています。

C Appendix C: ペンローズ図

無限遠まで含めて時空の因果的構造を表すためにペンローズ図を用いると便利です。ここでは Minkowski 時空での計量(2.3)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{C.1})$$

を例にしてペンローズ図を描いてみましょう。null 座標 u, v を導入すると

$$\left\{ \begin{array}{l} u = ct - r \\ v = ct + r \end{array} \right\} \rightarrow ds^2 = -du dv + \frac{(u-v)^2}{4} d\Omega^2 \quad (\text{C.2})$$

と表せます。半径 $r \geq 0$ なので null 座標の範囲は

$$-\infty < u \leq v < \infty$$

となります。さらに次の座標変換

$$\begin{aligned} u &= \tan U & -\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2} & \quad V \geq U \\ v &= \tan V & -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} & \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

を行い有限区間に写像すると計量は

$$ds^2 = (2 \cos U \cos V)^{-2} (-4dUdV + \sin^2(V - U)d\Omega^2) \quad (\text{C.4})$$

と変換されます。さらに共形変換

$$d\tilde{s}^2 = \Lambda^2 ds^2, \quad \Lambda = 2 \cos U \cos V \quad (\text{C.5})$$

を行います。この変換は各時空点での長さを変える変換ですが、角度は変えません。特に、null 測地線は

$$ds^2 = 0 \iff d\tilde{s}^2 = 0$$

とどちらの計量でも同じで、時空図では 45° の直線を描きます。Minkowski 時空(C.1)に変換(C.3)(C.5)を施して得られる時空

$$d\tilde{s}^2 = -4dUdV + \sin^2(V - U)d\Omega^2 \quad (\text{C.6})$$

は、光の伝搬の性質を保ち無限遠を座標 U, V の有限な値に写像しているので Minkowski 時空の因果構造が見やすくなっています。この計量の角度部分 (θ, ϕ) は省略して (U, V) 座標だけを図示したのが次のペンローズ図です。

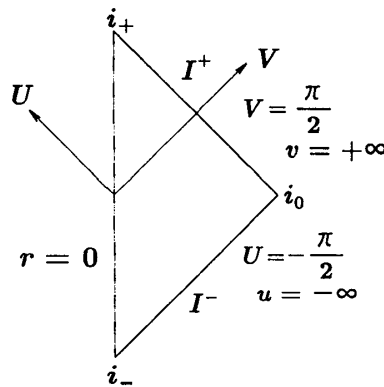


図 13: Minkowski 時空のペンローズ図

ここでは、次のような過去と未来の null 無限遠 (past null infinity I^- , future null infinity I^+) が時空につけ加えられています。

$$\begin{array}{l}
 \text{past null infinity } I^- \\
 \left. \begin{array}{l} U = -\pi/2 \\ |V| \neq \pi/2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow -\infty \\ v \text{ finite} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty \\ r+t \text{ finite} \end{array} \right\} \\
 \text{future null infinity } I^+ \\
 \left. \begin{array}{l} |U| \neq \pi/2 \\ V = \pi/2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \text{ finite} \\ v \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \\ r-t \text{ finite} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

参考文献

- [1] S. W. Hawking. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 43, pp. 199–220, 1975.
- [2] 佐々木節. 一般相対論. 産業図書, 1996.
- [3] Kip S. Thorne. ブラックホールと時空の歪み. 白揚社, 1997.
- [4] P. K. Townsend. Black holes. *gr-qc/9707012*, 1997.
- [5] P.C.W. Davies S.A. Fulling and W. G. Unruh. *Phys.Rev.D*, Vol. 13, pp. 2720–2723, 1976.
- [6] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.
- [7] A.A. Abrikosov L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinski. *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*. Dover, 1963.
- [8] W. G. Unruh. *Phys.Rev.Lett.*, Vol. 51, pp. 1351–1353, 1981.
- [9] W. G. Unruh. *Phys.Rev.D*, Vol. 51, pp. 2827–2838, 1995.
- [10] M. Nuori-Zonoz and T. Padmanabhan. *gr-qc/9812088*, 1998.
- [11] A. Ohashi and M. Sakagami. *in preparation*.
- [12] S. Corley and T. Jacobson. *Phys.Rev.D*, Vol. 54, pp. 1568–1586, 1996.
- [13] H. Saida and M. Sakagami. *Phys.Rev.D*, Vol. 61, p. 084023, 2000.